$2\ln n \in [1-\frac{1}{n}, +\infty[$; $\phi_n(2\ln n) < 0 = \phi_n(\alpha_n)$

d'où $\alpha_n < 2\ln n \Rightarrow 1+n\alpha_n < 1+2n\ \ln n$

or $\ln(1+n\alpha_n) = \alpha_n$ d'où $\alpha_n < \ln(1+2n\ \ln n)$

Conclusion : $\forall n \geq 2$, $\ln n < \alpha_n < \ln(1+2n\ \ln n)$

c) $1 < \dfrac{\alpha_n}{\ln n} < \dfrac{\ln(1+2n\ \ln n)}{\ln n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+2n\ln n)}{\ln\ n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln[n\ \ln n\ (2+\frac{1}{n\ \ln n})]}{\ln n}$$

$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + \frac{\ln(2+\frac{1}{n\ \ln n})}{\ln n} = 1 \quad \text{car :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{X\to+\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(2+\frac{1}{n\ \ln n})}{\ln n} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n}{\ln n} = 1$.

Solution 14 :

$1°/\bullet\ \mathcal{A} = \int_1^2 \ln(1+x)\ \ dx$

Posons $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \dfrac{1}{1+x} \end{cases}$

D'où $\mathcal{A} = [\ x\ \ \ln(1+x)\ ]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x}\ \ d\ x$

Calculons $\int_1^2 \frac{x}{1+x}\, dx$.

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x}\, dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{1+x}\, dx = \int_1^2 1 - \frac{1}{1+x} dx$$

$$= [\ x - \ln(1+x)\ ]_1^2 = 1 + \ln\frac{2}{3}$$